NEODREĐENI INTEGRAL

Za funkciju $F(x)$ kažemo da je **primitivna** funkcija funkcije $f(x)$ ako je

$$F'(x) = f(x).$$

Funkcija, na primjer $F(x) = x^2$ je primitivna funkcija za funkciju $f(x) = 2x$ jer je $(x^2)' = 2x$.

Iz diferencijalnog računa je poznato da je izvod zbira jednak zbiru izvoda, kao i da je izvod konstante jednak nuli, tj.

$$[F(x) + c]' = F'(x)$$

za proizvoljno $c \in R$.

Odatle slijedi zaključak:

Ako je F(x) primitivna funkcija funkcije f(x), onda je i F(x) + c primitivna funkcija za f(x).

$\{F(x) + c\}$, gdje je c proizvoljna konstanta zovemo **neodređeni integral** funkcije f(x) i označavamo sa

$$\int f(x)dx$$

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

Funkciju f(x), tada, zovemo **podintegralnom** funkcijom.

Izračunati neodređeni integral funkcije f(x) znači odrediti skup $\{F(x) + c\}$, tako da je F(x) primitivna funkcija funkcije f(x) i c proizvoljna konstanta.

Primjeri

Primjer 1. Neodređeni integral funkcije $f(x) = 2x$ je

$$\int 2x dx = x^2 + c$$

jer je $(x^2 + c)' = 2x$.

Primjer 2.

$$\int \cos x dx = \sin x + c$$

$$\left[\int f(x)dx\right]' = \left[F(x)+c\right]' = f(x)$$

izvod neodređenog integrala jednak je podintegralnoj funkciji.

Važi i obratno

$$\int f'(x)dx = f(x)+c$$

Tablica

$\int dx = x + c$	$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c, a \neq -1$
$\int \frac{dx}{x} = \ln\|x\| + c$	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$
$\int e^x dx = e^x + c$	$\int \cos x dx = \sin x + c$
$\int \sin x dx = -\cos x + c$	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + c$
$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + c$	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c$
$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + c$	

$$\int [f(x)+g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

$$\int \mathrm{c}\cdot \mathrm{f}(\mathrm{x})\mathrm{dx} = \mathrm{c}\cdot \int \mathrm{f}(\mathrm{x})\mathrm{dx}$$

Primjeri

Izračunati:

a) $\int \left(x^3 - 2e^x\right)dx$

e) $\int \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - x\right)dx$

b) $\int \left(\cos x - \sqrt[3]{x^2}\right)dx$

c) $\int a \cdot 2^x \, dx$

d) $\int \left(\frac{a}{\sin^2 x} - b\right)dx$

METODE INTEGRACIJE

Metoda zamjene se sastoji u uvođenju nove promjenljive, tako da se neodređeni integral funkcije oblika f[g(x)]g′(x) svodi na neodređeni integral funkcije f(t):

Uvedimo novu promjenljivu t tako da je

g(x) = t   i, dakle,   g′(x)dx=dt

$$\int f\left[g(x)\right]g'(x)dx = \int f(t)dt$$

tj. ako je F(t) primitivna funkcija za f(t), onda je F[g(x)] primitivna funkcija za f[g(x)]g′(x).

Primjeri

Primjer 1. Izračunati $I = \int \left(x^2 + 3\right)^5 2x\,dx$

Podintegralna funkcija je oblika f[g(x)]g′(x) gdje je f(x) = x^5 i g(x) = $x^2 + 3$, pa se zamjenom $x^2 + 3 = t$, odakle je 2xdx = dt, dobija

$$\int \left(x^2 + 3\right)^5 2x\,dx = \int t^5 dt = \frac{t^6}{6} + c = \frac{1}{6}\left(x^2 + 3\right)^6 + c$$

Primjer 2. Neodređeni integral $\int \sqrt{2x - 3}\,dx$

zamjenom 2x – 3 = t i 2dx = dt, svodimo na

$$I = \int \sqrt{t} \cdot \frac{dt}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} + c = \frac{1}{3}\sqrt{\left(2x - 3\right)^3} + c$$

Metoda parcijalne integracije se sastoji u tome što se podintegralni izraz f(x)dx predstavi u obliku proizvoda funkcije u(x) ≡ u i diferencijala funkcije v(x) ≡ v:

$f(x)dx = u(x) \cdot dv(x) = u \cdot dv$

$$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du = \int f(x)dx \qquad (*)$$

Primjer 5. Izračunati $I = \int xe^{x}dx$

Rješenje: Podintegralni izraz $xe^{x}dx$ predstavićemo u obliku $u(x)v'(x)dx$: $u(x) = x$, $v'(x)dx = e^{x}dx$

Diferenciranjem prvog i integracijom drugog izraza, dobijamo:
$du(x) = dx$ i $\int v'(x)dx = \int e^{x}dx$

$v(x) + c_1 = e^{x} + c_2$, ili $v(x) = e^{x} + c$.
No, obzirom na formulu ($*$) (desna strana već sadrži proizvoljnu konstantu) možemo uzeti da je $c = 0$, pa je $v(x) = e^{x}$. Primjenimo li, sada, formulu ($*$), imaćemo: $I = xe^{x} - \int e^{x}dx = xe^{x} - e^{x} + c$

Integracija racionalnih funcija

- Prvo razmotrimo kako se izvodi integracija racionalne funkcije oblika

$$\frac{1}{x^2 + px + q}$$

čiji imenilac nema realnih nula(D<0), tj . $q - p^2/4 > 0$.

$$\int \frac{dx}{x^2 + px + q} = \int \frac{dx}{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}} = \int \frac{dt}{t^2 + a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a} + c$$

Smjena $x + p/2 = t \Rightarrow dx = dt$ i $q - p^2/4 = a^2$

$$\int \frac{dx}{x^2 + px + q} = \frac{2}{\sqrt{4q - p^2}} \operatorname{arctg} \frac{2x + p}{\sqrt{4q - p^2}} + c$$

- integracija racionalnih funkcija čiji je imenilac oblika

$$P_n(x) = (x-x_1)^{k_1}(x-x_2)^{k_2}\dots(x-x_t)^{k_t}(x^2+px+q)^{l_1}\dots(x^2+rx+s)^{l_t}$$

$$x_i \neq x_j,\ i \neq j,\ i,j \in \{1,2,\dots,t\},\ 4q - p^2 \neq 4s - r^2,$$

$$x_1,x_2,\dots,x_t,\ p,q,\dots,r,s \in \mathrm{R},\ k_1,k_2,\dots,k_t \in \mathrm{N},$$

$$q - \frac{p^2}{4} > 0, \dots, s - \frac{r^2}{4} > 0$$

$$f(x) = \frac{Q_m(x)}{P_n(x)}$$

- $Q_m(x)$ – polinom stepena m
- $P_n(x)$ – polinom stepena n

f(x) je **prava** ako je m<n

- Neka je koeficijent uz stepen x^n imenioca $P_n(x)$ broj 1. Tada pravu racionalnu funkciju možemo predstaviti u obliku **zbira prostih razlomaka**, tj. u obliku:

$$f(x)=\frac{Q_m(x)}{P_n(x)}=\frac{A_{k_1}}{(x-x_1)^{k_1}}+\frac{A_{k_1-1}}{(x-x_1)^{k_1-1}}+\ldots+\frac{A_1}{x-x_1}+$$

$$+\frac{B_{k_2}}{(x-x_2)^{k_2}}+\ldots+\frac{B_1}{x-x_2}+\ldots+\frac{L_{k_t}}{(x-x_t)^{k_t}}+\ldots+\frac{L_1}{x-x_t}+$$

$$+\frac{Px+Q}{(x^2+px+q)^{l_1}}+\ldots+\frac{Rx+S}{(x^2+rx+s)^{l_t}}$$

$\mathrm{A}_{\mathrm{k}_1},\ldots,\mathrm{A}_1,\mathrm{B}_{\mathrm{k}_2},\ldots,\mathrm{B}_1,\ldots,\mathrm{R},\mathrm{S}$ Konstante koje se određuju iz uslova identičnosti dva polinoma

Primjer

Racionalna funkcija $f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$

je prava jer je stepen brojioca (0) manji od stepena imenioca (2). Koeficijent uz najveći stepen imenioca je 1, nule imenioca su $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ tj. realne su i jednostruke, pa datu funkciju možemo predstaviti u obliku:

$$\frac{1}{x^2 - 3x + 2} \equiv \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} \quad \text{tj.} \quad \frac{1}{x^2 - 3x + 2} \equiv \frac{A(x-2) + B(x-1)}{(x-1)(x-2)}$$

Iz identičnosti slijedi da je $(A + B)x - (2A + B) = 1$, odnosno $A + B = 0$ i $2A + B = -1$, tj. $A = -1$, $B = 1$, pa je

$$\frac{1}{x^2 - 3x + 2} \equiv \frac{-1}{x-1} + \frac{1}{x-2}$$

$\int \frac{A_{k_1}}{(x-x_1)^{k_1}}dx$ je tablični. Za $k_1=1$ $\int \frac{A_{k_1}}{(x-x_1)^{k_1}}dx = A_{k_1} \ln|x-x_1| + c$

a za $k_1 \neq 1$ $\int \frac{A_{k_1}}{(x-x_1)^{k_1}}dx = A_{k_1}\int (x-x_1)^{-k_1}dx = A_{k_1} \frac{(x-x_1)^{-k_1+1}}{-k_1+1} + c$

Razmotrimo integral funkcije $\frac{Px+Q}{(x^2+px+q)^l}$

gdje x^2+px+q nema realnih nula

integral $\int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^l}dx$

se odmah rešava smjenom $x^2+px+q=t$,
odakle je $(2x+p)dx=dt$

Slično se i integral može srediti (za P≠0)

$$\int \frac{Px+Q}{(x^2+px+q)^l}dx = \frac{P}{2}\int \frac{2x+\frac{2Q}{P}}{(x^2+px+q)^l}dx =$$

$$\frac{P}{2}\int \frac{2x+P-P+\frac{2Q}{P}}{(x^2+px+q)^l}dx = \frac{P}{2}\int \frac{2x+P}{(x^2+px+q)^l}dx + \frac{P}{2}\int \frac{-P+\frac{2Q}{P}}{(x^2+px+q)^l}dx =$$

$$\frac{P}{2}\int \frac{2x+P}{(x^2+px+q)^l}dx + \frac{P}{2}\left(\frac{2Q}{P}-P\right)\int \frac{1}{(x^2+px+q)^l}dx$$

Radi se smjenom (slajd 17)

Razmatramo na narednim slajdovima

Razmatranjem integrala I_l, u potpunosti je opisana integracija racionalniih funkcija

$$I_l = \int \frac{1}{(x^2 + px + q)^l} dx$$

Za l=1, već je riješeno na slajdu broj 1. Neka je, sada, l>1. Kako je $x^2+px+q=(x+p/2)^2+(4q-p^2)/4$ (dobijeno dopunom do potpunog kvadrata), to se uzimajući istu smjenu kao na slajdu 1:

$x + p/2 = t \Rightarrow dx = dt$ i $(4q\text{-}p2)/4 = a^2$

dobija

$$I_l = \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^l}$$

Riješimo integral $I_l = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^l}$

$$I_l = \frac{1}{a^2}\int \frac{a^2+x^2-x^2}{(x^2+a^2)^l}dx = \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{l-1}} -$$

$$-\frac{1}{a^2}\int \frac{x\cdot x}{(x^2+a^2)^l}dx = \frac{1}{a^2}I_{l-1} - \frac{1}{a^2}I.$$

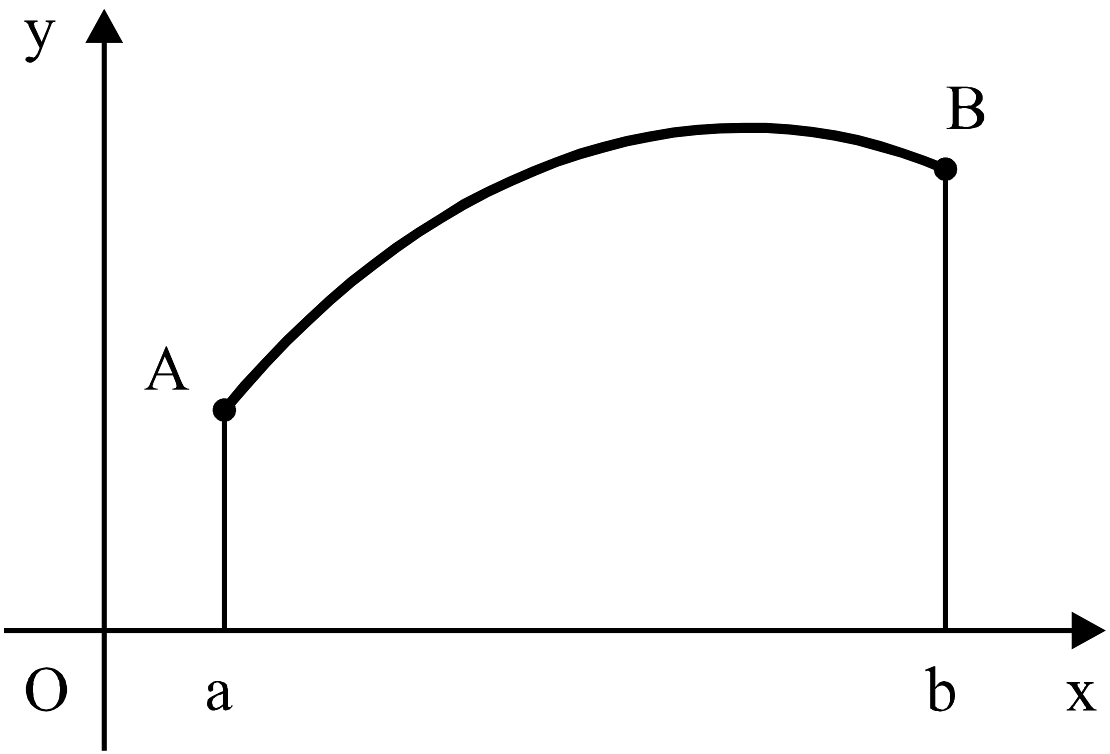
Kod integrala I primijenimo parcijalnu integraciju sa u = x, $dv = \frac{xdx}{(x^2+a^2)^l}$

Nakon računa (v se računa smjenom $x^2+a^2=t$), dobija se

$$I = \int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^l}dx = \frac{x}{2(1-l)(x^2+a^2)^{l-1}} - \frac{1}{2(1-l)}I_{l-1}$$

$$\Rightarrow I_l = \frac{1}{2(l-1)a^2}\cdot\frac{x}{(x^2+a^2)^{l-1}} + \frac{2l-3}{2(l-1)a^2}I_{l-1}$$

Određeni integral

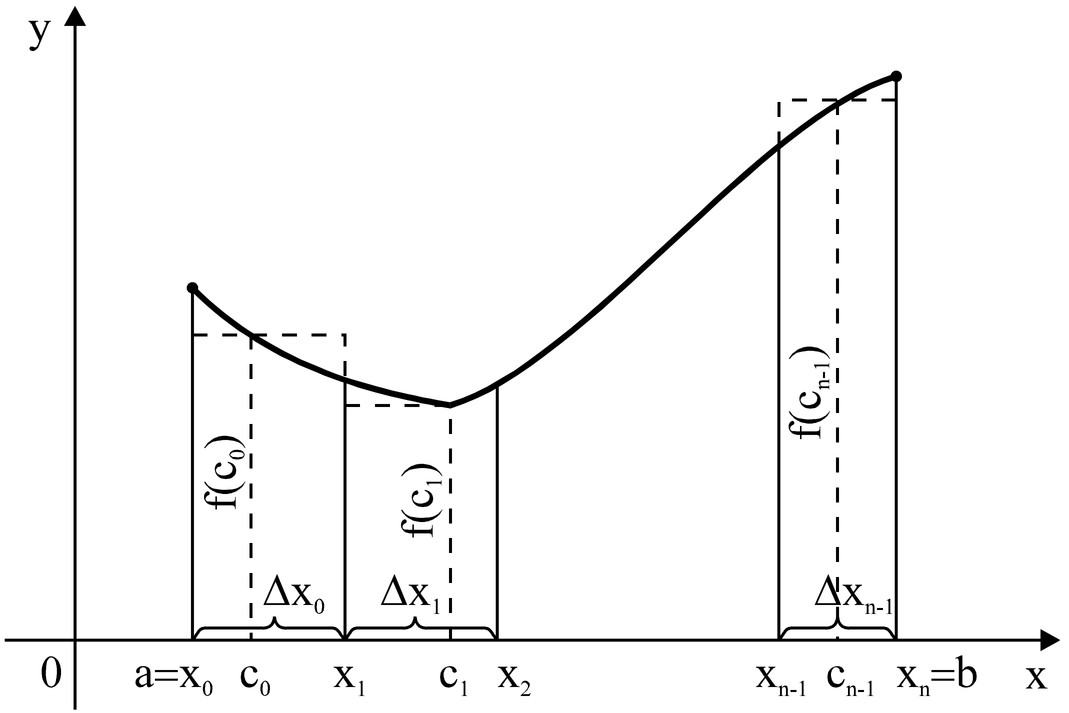


Problem određivanja površine krivolinijske figure može se svesti na određivanje površine ograničene dijelom grafika neprekidne pozitivne funkcije $y = f(x)$, odgovarajućim intervalom na Ox osi i ordinatama funkcije koje odgovaraju krajevima tog intervala. Takvu figuru zovemo **krivolinijskim trapezom**

Neka je $y = f(x)$ funkcija neprekidna na intervalu $[a,b]$, x_i tačke tog intervala, takve da je

$x_0 \equiv a < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n \equiv b$

i c_i, $i = 1,2,\ldots,n-1$ tačke intervala $[x_i,x_{i+1}]$.



Zbir

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_{i-1})\left(x_i - x_{i-1}\right) = \sum_{i=1}^{n} f(c_{i-1})\Delta x_i, \;\; \Delta x_i = x_i - x_{i-1}$$

zove se **n-ta integralna suma** funkcije $y = f(x)$ na intervalu $[a,b]$.

Graničnu vrijednost n-te integralne sume funkcije $y = f(x)$ na intervalu [a,b] kad $n \to \infty$, i $\max \Delta x_i \to \infty$, zovemo **određenim integralom** funkcije $y = f(x)$ na intervalu [a,b] i označavamo sa

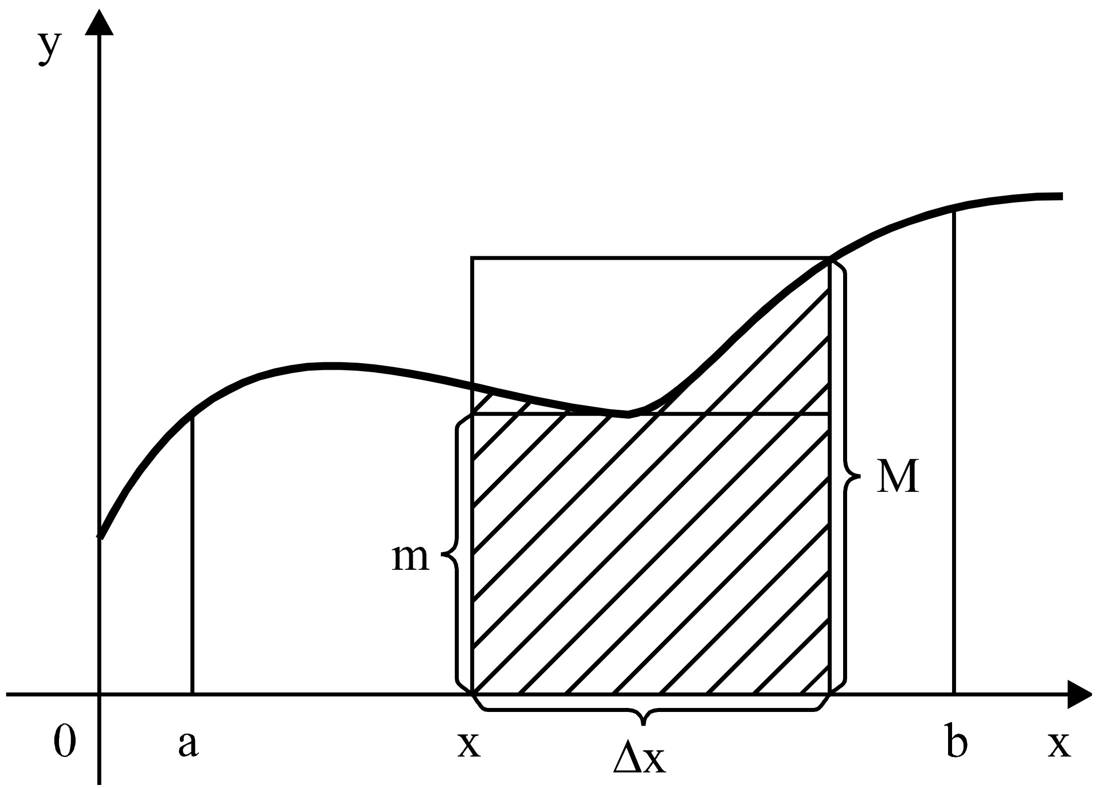
$$\int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f\left(c_{i-1}\right)\Delta x_i\,, \quad \max \Delta x_i \to 0$$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f\left(c_{i-1}\right)\Delta x_i$$

VEZA IZMEĐU ODREĐENOG I NEODREĐENOG INTEGRALA

Označimo sa $P(x)$ površinu ograničenu grafikom neprekidne, pozitivne funkcije $y = f(x)$, ordinatama $f(a)$ i $f(x)$ i intervalom $[a,x]$, $x < b$ i sa $\Delta P(x)$ priraštaj te površine ako se x promijeni za $\Delta x > 0$ (šrafirani dio).



Ako su m i M najmanja i najveća vrijednost funkcije f(x) na intervalu [x,x+ Δx], onda je

$$m \cdot \Delta x \leq \Delta P(x) \leq M \cdot \Delta x \text{ tj. } m \leq \frac{\Delta P(x)}{\Delta x} \leq M$$

$$\text{Kako je } \lim_{\Delta x \to 0} M = \lim_{\Delta x \to 0} m = f(x) \Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta P(x)}{\Delta x} = f(x) \Rightarrow$$

$\mathrm{P}'(\mathrm{x}) = \mathrm{f}(\mathrm{x})$ $\Rightarrow$ P(x) primitivna funkcija funkcije f(x).

F(x) proizvoljna primitivna funkcija za f(x) $\Rightarrow$
P(x) = F(x) + c $\Rightarrow$ P(b) = F(b) + c i P(a) = F(a) + c.

Iz $P(x)=\int_a^x f(x)dx$ slijedi

P(a) = 0 i, dakle, F(a) = -c,

$$P(b)=\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a) \equiv F(x)\Big|_a^b$$

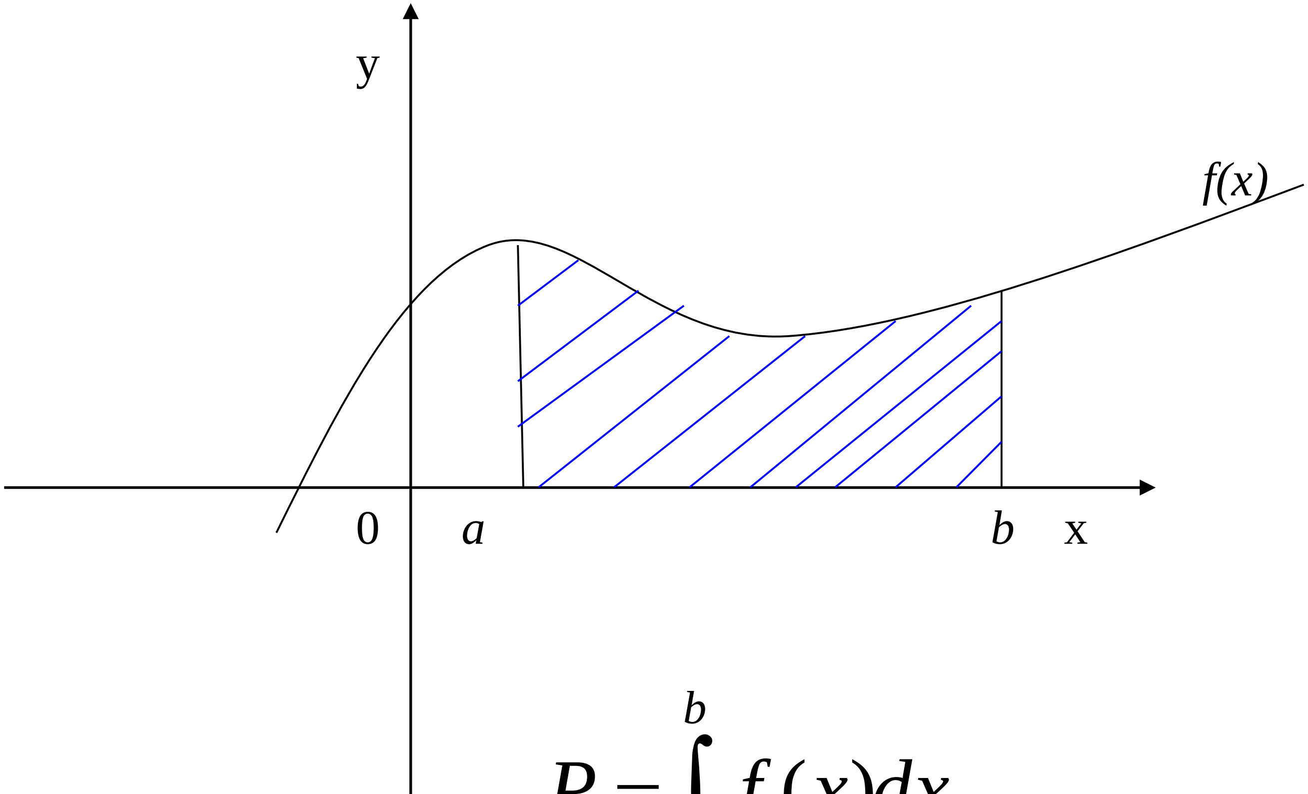
Njutn-Lajbnicova formula

Primjer 1. Izračunati $I=\int_1^{11}(2x+3)dx$

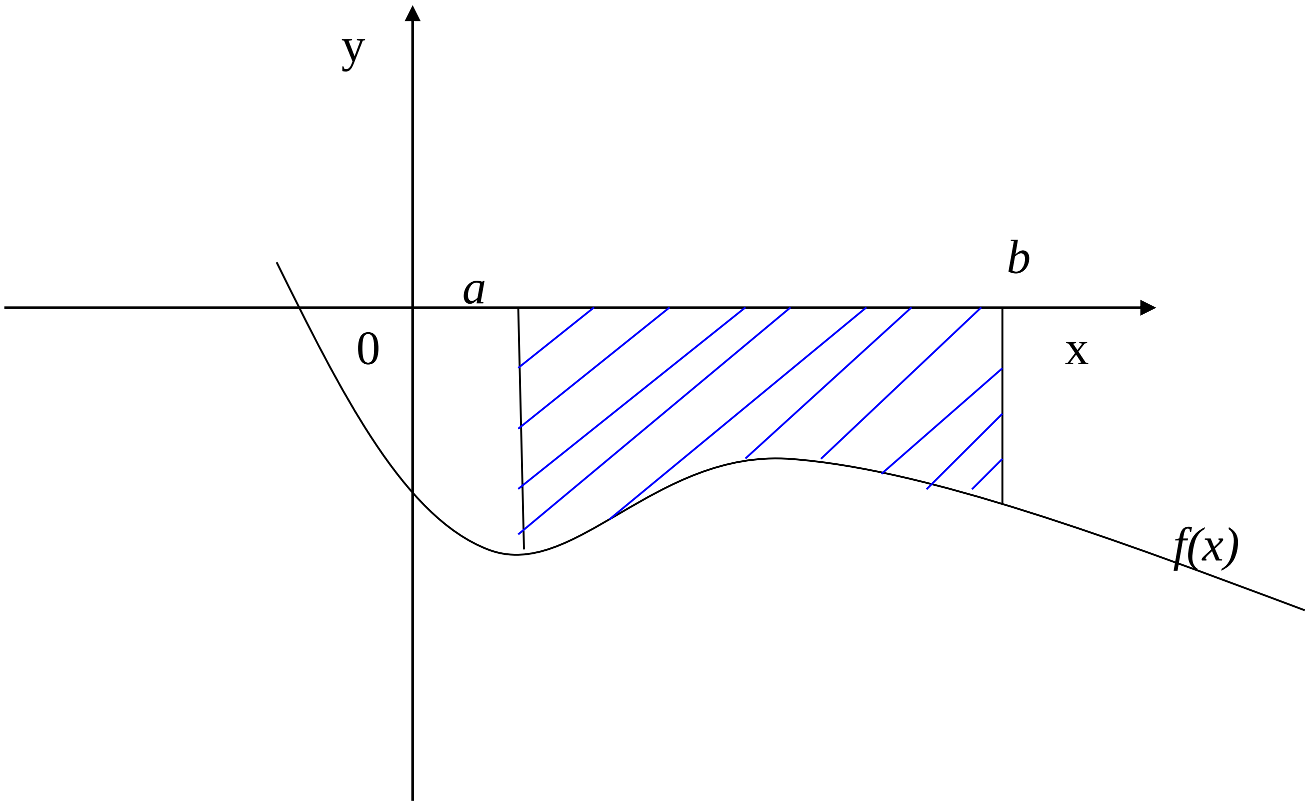
Jedna od primitivnih funkcija funkcije f(x) $=$ 2x $+$ 3 je F(x) $=$ x^2 $+$ 3x, pa je

$$I = F(x)\Big|_1^{11} = F(11)-F(1) = 154-4 = 150$$

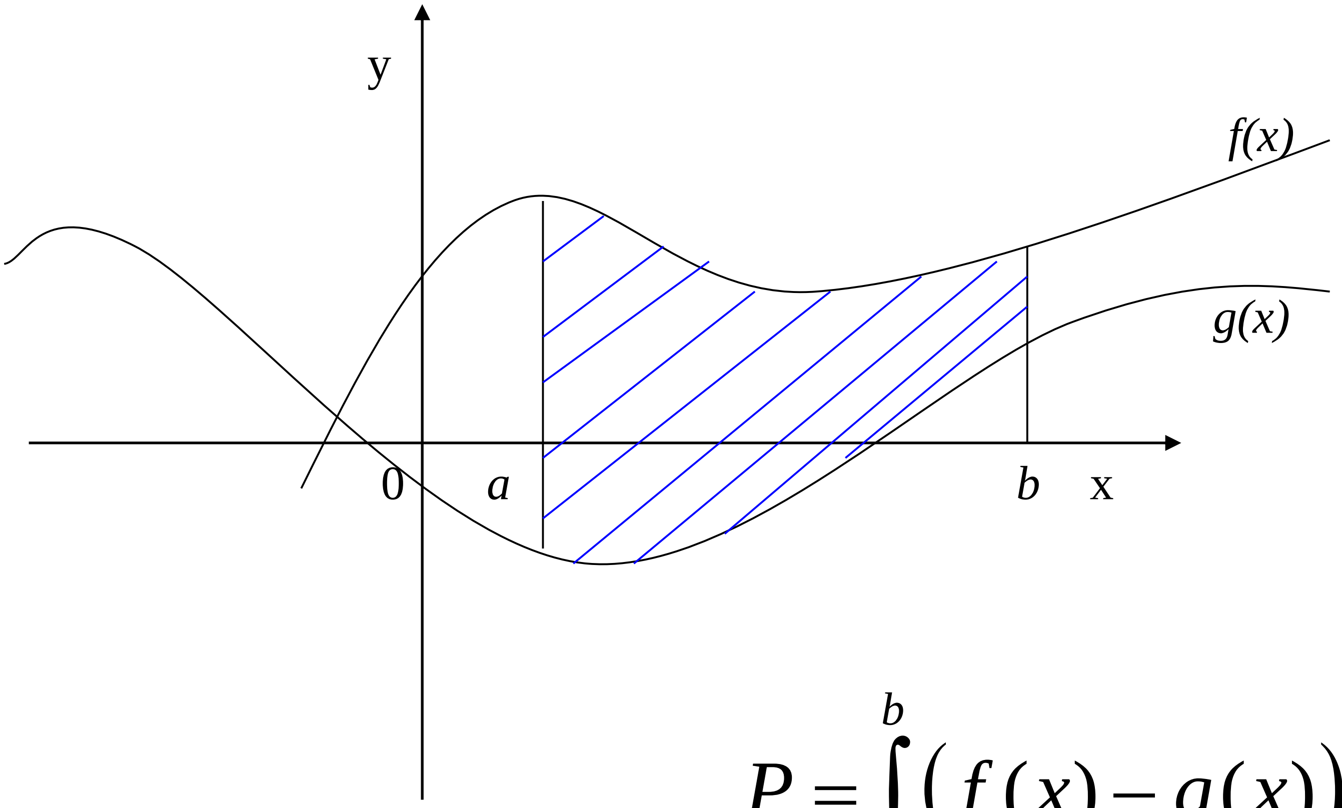
Računanje površine



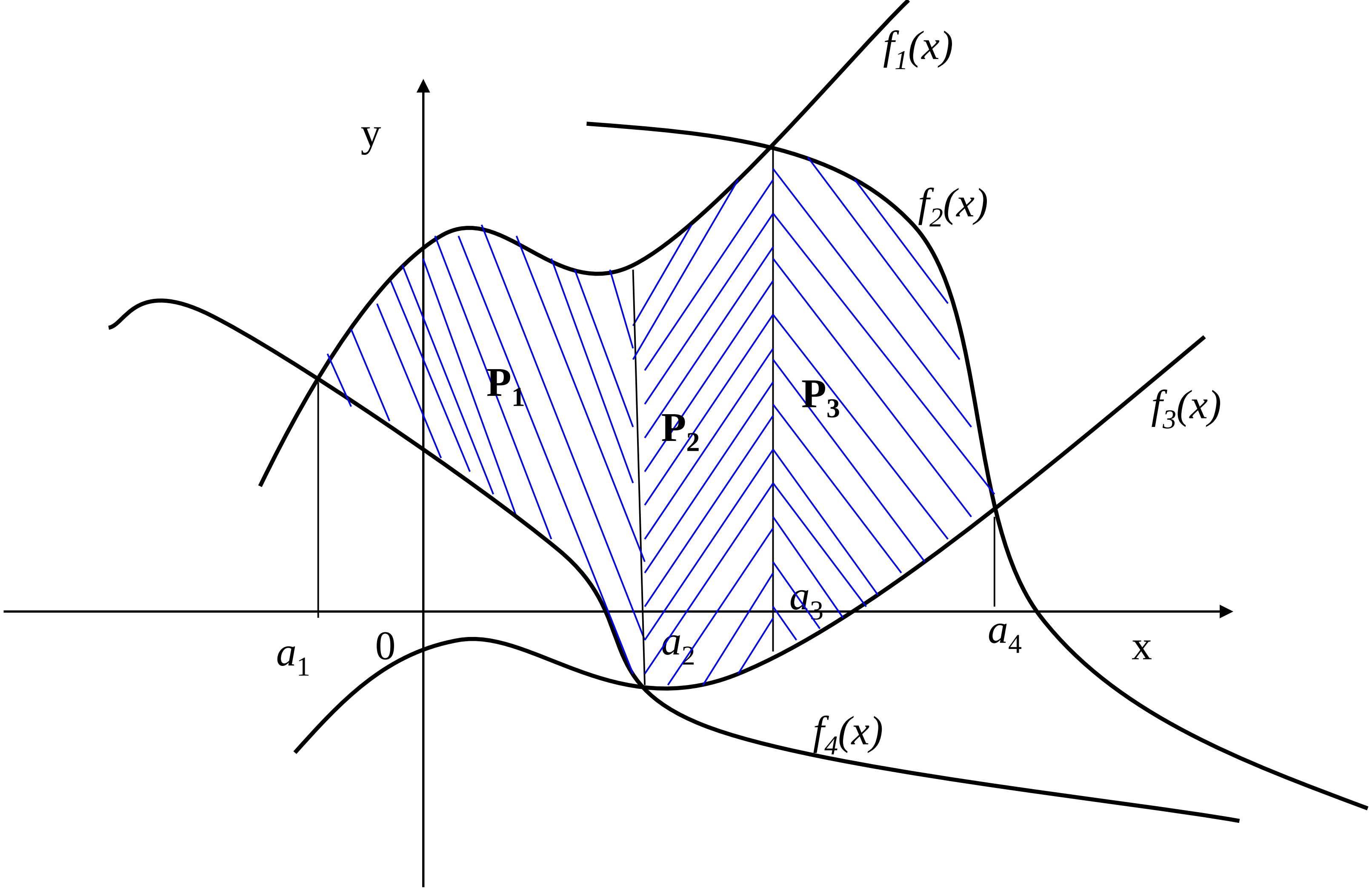
$$P = \int_a^b f(x)dx$$



$$P = -\int_a^b f(x)dx$$



$$P = \int_a^b \left(f(x) - g(x) \right) dx$$

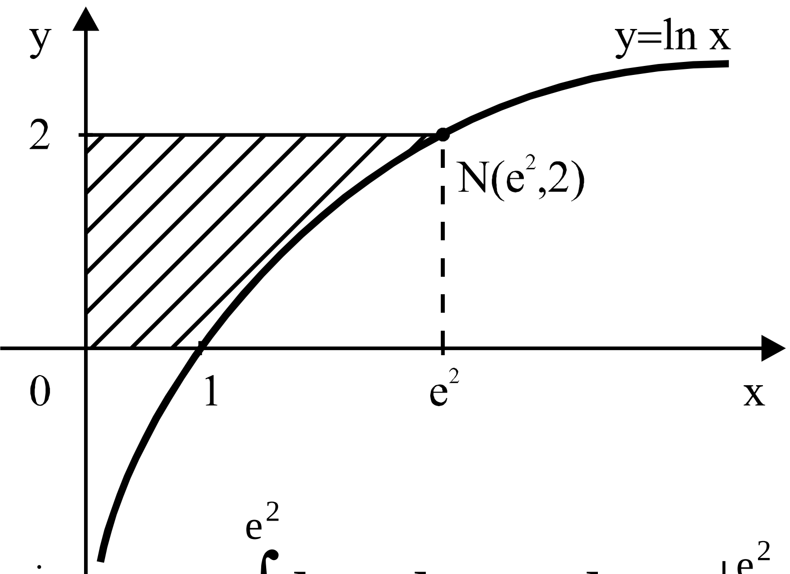


$$P = P_1 + P_2 + P_3 =$$

$$\int_{a_1}^{a_2} \left(f_1(x) - f_4(x) \right) dx + \int_{a_2}^{a_3} \left(f_1(x) - f_3(x) \right) dx + \int_{a_3}^{a_4} \left(f_2(x) - f_3(x) \right) dx$$

Primjer

Izračunati površinu ograničenu koordinatnim osama, paravom y = 2 i grafikom funkcije y = lnx integracijom: a) duž Ox-ose, b) duž Oy-ose.

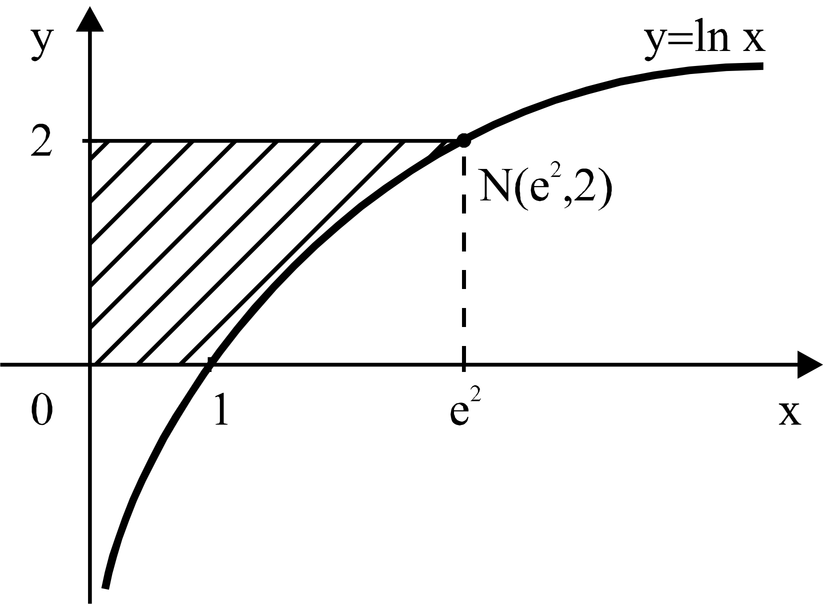


$$P = P_{\square OAMN} - \int_1^{e^2} \ln x dx = 2e^2 - \int_1^{e^2} \ln x dx$$

$\int_1^{e^2} \ln x dx$ radimo parcijalnom integracijom: u = lnx; dv = dx, pa je du = dx/x i v = x. Otuda je:

$$\int_1^{e^2} \ln x dx = x \ln x \Big|_1^{e^2} - \int_1^{e^2} \frac{x}{x} dx = 2e^2 - e^2 + 1 = e^2 + 1$$

pa se dobija P = $2e^2 - e^2 - 1 = e^2 - 1$.



b) Duž y-ose je za integraciju jednostavniji slučaj jer je

$P = \int_0^2 f(y)dy$ gdje je $f(y) = e^y$ (iz $y = \ln x \Rightarrow x = e^y$). Dakle,

.

$$P = \int_0^2 e^y dy = e^y \Big|_0^2 = e^2 - 1$$

Nesvojstveni integral

- Beskonačne granice integracije
- Neograničena podintegralna funkcija

Beskonačne granice integracije

- $F(\infty)$ and $F(-\infty)$ ne postoje, jer $\infty, -\infty \notin R$.

$$\int_a^{\infty} f(x)dx$$

- U tom slučaju primjenjuje se koncept granične vrijednosti.

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)dx$$

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to\infty} \int_a^b f(x)dx$$

Neograničena podintegralna funkcija

- I pored toga što su granice integracije konačne, integral može biti nesvojstveni ako je podintegralna funkcija neograničena na [a, b]. Ponovo primjenjujemo koncept limesa.

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx.$$

Primjeri

a) $\int_{1}^{\infty} \frac{dx}{x} = \infty$

b) $\int_{0}^{\infty} e^{-x} dx = 1$

c) $\int_{0}^{\infty} x^2 e^{-x} dx = 2$

Neke ekonomske primjene integrala

Od granične do ukupne funkcije

Investicije i akumulacija kapitala

Od granične do ukupne funkcije

- Diferenciranjem ukupne funkcije (npr. troškova) dobija se granična funkcija
- Integracijom granične funkcije dobija se ukupna

Investicije i akumulacija kapitala

- Akumuliranje kapitala je proces uvećavanja datog kapitala
- Kapital = K(t).

$$\frac{dK}{dt} = I(t)$$

$$K(t) = \int I(t)dt$$